参赛队员：王梓木，丁星元，高蔚宁

学校：南京外国语学校

省份：江苏省

指导老师：王刚

论文题目：交通信号实时控制模型

论文题目：交通信号实时控制模型

摘要：本文通过交叉路口对每个车道车队的形成，消散过程进行描述，并考虑信号灯转化和车辆的损失时间，建立了交通灯信号实时控制的点、线、面模型，以车辆的平均等待时间为目标，采用粒子群优化算法得到优化的实时信号配时方案。

Subject: the Model of Real-time Traffic Signals

Abstract: In this thesis, we establish a point, line, surface model controlled by real-time traffic signals through the process of formation and dissipation of motorcade at each intersection and the time lost by signal lamps changing and vehicles. Aiming at reducing the average waiting time, we utilize the Particle Swarm Optimization to obtain the optimal scheme for real-time traffic signals.

交通信号实时控制模型

一. 问题的描述

1.1 问题提出

城市交通管理问题的基本问题之一，是城市道路交通信号控制问题。即根据不同交叉路口、不同相位、不同方向、不同时段的交通流量(标准车辆数)，合理的配置各路口的信号灯的周期长，以及同一周期内的红、绿、黄信号的响应时间。

以前大多采用固定周期，固定信号比的配时控制方案。为提高道路服务功能，设计实时优化的配时方案对道路畅通和应急决策管理具有重要意义。实时配时方案，即根据交通流量的实时大小，实时配置信号灯的周期长、各种色灯的响应时间，同时考虑信号灯的转换与车辆的起动的损失时间，使全体车辆在所有道口的等待的时间最短。分别考虑已下几个方面的问题：

(1) 分别以单个交叉路口、线状多个交叉路口（至少2个交叉口）、网络区域内多个交叉路口（至少5个交叉口）为对象，建立相应的交通信号实时控制模型，并给出相应的实时算法；

(2) 根据城市交通流分布规律，设计一种实时产生交通流序列的方案。然后将产生的交通流数据带入建立的两个交通信号实时控制模型，给出这两种情况下的实时信号配时方案，并比较和评价实时配时方案的效果和优势；同时分析模型算法的可计算性、算法的复杂性；

1.2 问题分析

要以“全体车辆在所有道口的等待的时间最短”为目标来实时配时交通控制方案。先考虑下面这种情况：如果有两个周期长相等的配时方案，且全体车辆在所有道口的等待的时间最短值也是相等的，但两个周期内通过的车辆数不一样。那么显然，通过车辆数多的配时方案更优。因此，本文选用车辆平均等待时间最短将更能反映“全体车辆在所有道口的等待的时间最短”的目标。

在实际情况中，对于不同的的交通路口，由于各道口各车道车流不一致，所实施的相位控制也应随交通流的不同。如果交叉路口的相位处于图1所示的第一相位，则表明左侧（或右侧）道口的车辆可以左（或右）转向上（或下）行驶通过交叉路口，其它相位类似。根据实际经验发现，相位设置过多或过少都将增加车辆的等待时间。现在，交叉路口一般都是采用四相位信号控制。四相位如图1所示。

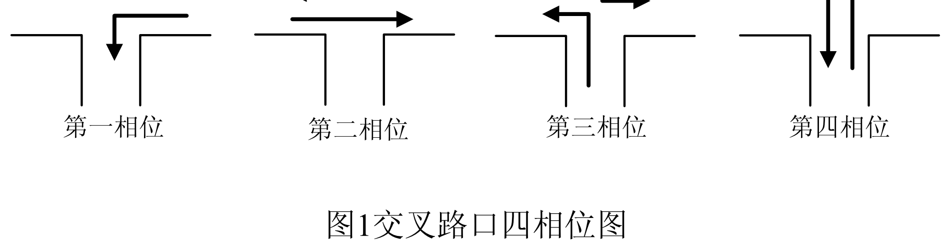

图1交叉路口四相位图

在交叉路口，尤其是交通流量较大时，如果交通信号灯的周期长和各种色灯的响应时间设置不当，极易造成大量车辆滞留路口，从而急剧增加车辆的等待时间。若周期长很大，则通行权过后需要等待很长的时间才能重新获得通行权，这就增加了车辆平均等待时间；反之，周期也不能太短，否则刚获得通行权的车道，刚通过几辆车后又失去通行权，则后面排队的车辆需再等待一个周期才能通过，那么车辆的平均等待时间就增加不少。同理，各种色灯的响应时间也要依据不同车道不同流量而定。

实时配时方案，就是在同时考虑信号灯的转换与车辆的起动的损失时间，根据交通流量的实时大小，实时配置信号灯的周期长、各种色灯的响应时间，达到使全体车辆在所有道口的等待的时间最短的目的，即平均车辆等待时间最短。

（1）单交叉路口配时模型分析

对于单交叉路口，由于车流量知道，那么到达交叉路口的车辆数是较容易计算的。所以，计算平均车辆等待时间主要是计算道口所有车辆的等待时间。该值可以通过计算每个周期时间内各个车道上所有车辆的等待时间，然后相加即可。而车道上车辆等待时间，包括排队等待通过的时间、车辆启动的损失时间、信号灯转换的损失时间。车辆启动和信号灯转换的损失时间是一常值，容易解决。

由于不同车辆到达的时间难以统计，所以就无法计算出每辆车等待的时间，也就不可能得到所有车辆的等待时间了。但是，车流量是一个随时间变化的函数，通过对车流量进行积分，就可以得出某一时间段内到达的车辆数，那么也就可以得到排队车辆数。而对排队车辆数进行时间积分就可以得出该车道所有车辆的等待时间。累加各道口所有车道的车辆等待时间，就得到了目标值——全体车辆在所有道口的等待的时间。

使平均车辆等待时间最短的目标函数中有各相位持续的时间、周期长、每条车道的车流量等变量，通过分析这些变量之间的关系，以及实际的物理意义，可以得出它们之间的约束关系，然后根据各种算法对其求解，从而得到最佳配时方案。

（2）线状多个交叉路口的配时模型分析

对于线状多个交叉路口的情况，每个交叉路口都有周期和相位时间，也就是说，这里有两个周期长、八个相位时间需要配时。除此之外，还要分析相邻交叉路口相连路段上车流量的约束关系。所以，对于该问题，不仅增加了规划变量，还增加了约束条件，复杂度增加不少。为降低复杂度、节约时间，这里对问题进行简化，假定各交叉路口的周期相同，那么整体线状多交叉路口的整体周期也就等于每个交叉路口的周期。通过设定相邻交叉路口的相位差，线状多个交叉路口的车辆等待时间计算就简化为对单个交叉路口的车辆等待时间求解，求和之后与所有车辆数相除就得出目标函数。但相邻交叉路口相连路段上车流量的约束关系不能忽略。

（3）模型求解算法分析

本文所建立的点控制模型、线性控制模型都是复杂的非线性规划问题。同时，交通流量的时变性、随机性增加了信号实时配时问题的复杂度。在该类题的求解中，巨大的计算代价始终是非线性问题的一个难以克服的难点。

对于非线性规划问题的现代算法较多，如遗传算法、模拟退火算法、蚁群算法、禁忌搜索算法等，但是这些算法的搜索速度较慢、效率较低，对车流量随机性和动态性的表达也极为困难，难以满足这里复杂而又有实时性要求的模型求解问题。

在智能算法当中，粒子群算法能够快速地进行收敛，能够较好地满足信号配时的实

时性要求，所以本文将采用粒子群算法对所建立的各种模型进行求解。

如果严格按照实际，对交叉路口进行实时配时建模，其复杂度和计算量将会随着交叉路口数的增加而急剧增加。为了简化计算和分析的复杂度，这里作了一些假设。

二． 模型假设和符号说明

2.1 模型假设

（1）黄色信号灯的时间为定值。

（2）交通信号灯是按红绿黄的顺序循环变化；

（3）车辆和行人都能严格遵守交通规则；

（4）各交通路口的周期相等；

（5）车辆右转行驶顺畅，不存在等待时间；

（6）城市交通流服从Poisson 分布规律；

（7）交叉路口有四个道口，车道数为双向三车道，分为四个相位。

2.2 符号说明

为了便于后文的分析说明，这里将用到的主要变量及其含义列出如下：

$i\left(i=1,2,3,4\right)$

表示相位，$i=1,2,3,4$ 分别表示第一相位、第二相位、第三相位、第四相位；

$j\left(j=1,2,3,4\right)$

表示道口所处的道口，$j=1,2,3,4$ 分别表示十字交叉路口西、南、东、北四个道口；

$k\left(k=1,2,3\right)$

表示车道的编号，$k=1,2,3$ 分别表示入口车道中左转、直行和右转车道；

$l\left(l=1,2,\cdots\right)$

表示交叉路口的编号，$l=1,2,\cdots$ 分别表示1号、2号、…号交叉路口；

t_{xi} 表示第 x 周期第 i 相位绿灯时长；

t_H 表示黄色信号灯持续时间，为定值；

T_x 表示第 x 周期信号灯的周期时长；

$t_{\min}$ 表示相位的最小绿灯时长，为定值；

$t_{\max}$ 表示相位的最大绿灯时长，为定值；

$T_{\min}$ 表示周期的最小时长，为定值；

$T_{\max}$ 表示周期的最大时长，为定值；

$u_{xjk}(t)$ 表示第 x 周期 j 道口和第 k 车道上 t 时刻流入的车流量；

U_{jk} 表示 j 道口第 k 车道上的饱和流量；

M_{xjk} 表示第 x 周期 j 道口和第 k 车道上到达路口的车辆数；

M_x 表示第 x 周期内到达路口的车辆总数；

$v_{xjk}(t)$ 表示第 x 周期 j 道口第 k 车道 t 时刻流出的车流量；

$S_{xjk}(t)$ 表示第 x 周期 j 道口第 k 车道 t 时刻排队车辆数；

S_{xjk} 表示第 x 周期末时 j 道口第 k 车道排队车辆数；

S_{jk} 表示 j 道口 k 车道绿灯开始时允许的最大排队长度；

t_{Yxjk} 表示第 x 周期 j 道口第 k 车道所有车辆延误时间之和；

t_Q 表示车启动时的延误时间，为定值。

三．交通信号实时配时方案及控制模型

目前交通信号配时大多采用F.webster-B.Cobber理论和他们提出的F-B方法。常用信号最佳周期近似计算方法以Webster和Akcelic方法为主。这些计算方法

大多以车辆通过交叉路口的等待时间作为衡量标准，此类等待方式与平均峰值期间路口车辆的延误较为吻合，而在高峰期实际车辆等待时间比公式计算的等待时间要大。正是由于该方法未能考虑到车流的实时变换，也就不能对交通信号灯进行实时控制，从而增加了车辆的平均等待时间，降低了交叉路口的通行能力。针对这一问题，本节以路口车辆平均等待时间最短为目标，建立实时配时的交通信号灯控制模型。

交叉路口的交通信号实时配时，是以单个交叉路口为基础的；而在计算单个交叉路口车辆平均等待时间时，需要对每条车道上周期内的车辆总数与车辆等待时间进行计算，所以这里先建立单个车道上车辆数及其等待时间的计算模型。

3.1 单个车道上车辆数及其等待时间计算模型

对于每一条车道，所面对的无非就是红、绿、黄灯的循环变化。根据对每个相位下车道信号灯的变换知道，在一个周期内，某一车道上信号灯的变换顺序为红、绿、黄、红，如图2所示。但是最前和最后的红灯可能不存在，即持续时间为0，鉴于此，建立下面的计算模型。

3.1.1各车道的车辆数及等待时间计算模型

交叉路口交通信号相位的循环变换，使得同一时刻不同车道上信号灯的颜色是不同的。每个相位上都有两条车道具有通行权，这两条车道上的信号灯的颜色是一样的。图2显示了交叉路口一个周期内，每个相位上不同车道所对应的信号灯的颜色，这能清晰看清那条车道什么时候具有通行权。

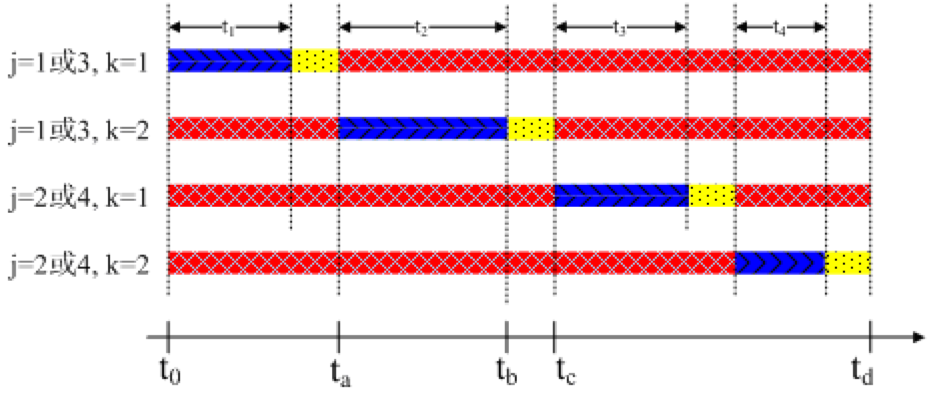

图2某车道交通灯示意图

为了计算 j 道口上第 k 车道的等待时间，不失一般行，可以选择 $j=1,k=2$ 车道作为分析对象。设起始时间为 t_0，在第 x 周期 T_x 内，各色信号灯结束时刻分别为 t_a,t_b,t_c,t_d，那么应满足 $t_d-t_0=T_x$，如图2所示。由于不同信号灯下车辆的等待时间计算方法是不一样的，所以，为了计算路口所有车辆的等待时间，需计算周期内每一时间段内的车辆等待时间，然后相加。下面分时间段进行分析：

（1）$t\in[t_0,t_a]$

车道在该时间段处于红灯状态，t_0时刻已经处于等待的车辆数与刚流入的车辆数之和就是t时刻排队等待通过的车辆数，为

$$S_{xjk}(t)=S_{(x-1)jk}+\int_{t_0}^{t}u_{xjk}(\tau)d\tau \tag{1}$$

因为排队等待的车辆数是与t有关的函数，则车辆的等待时间是该函数对时间t的积分值。因此，该期间内所有车辆等待时间为

$$t_{Ya}=\int_{t_0}^{t_a}S_{xjk}(t)dt \tag{2}$$

（2）$t\in[t_a,t_b]$

该时间段车道处于绿灯状态，车辆可以通行，排队的车辆数要减去流出的车辆数。若等待车很多，多到绿灯结束时还有等待的车辆，则绿灯亮时，车将以饱和流量通过该交叉路口，滞留排队车辆数为

$$S_{xjk}(t)=S_{xjk}(t_a)+\int_{t_a}^{t}u_{xjk}(\tau)d\tau-U_{jk}\bullet t=S_{(x-1)jk}+\int_{t_0}^{t}u_{xjk}(\tau)d\tau-U_{jk}\bullet t \tag{3}$$

若绿灯结束前没有等待的车辆，则上式将为负值，而实际上等待车辆数为0；因此，这里将上式为负值时取为0。综合这两种情况，t时刻排队等待的车辆数为

$$S_{xjk}(t)=\max\left\{0,\left(S_{(x-1)jk}+\int_{t_0}^{t}u_{xjk}(\tau)d\tau-U_{jk}\bullet t\right)\right\} \tag{4}$$

因为绿灯刚亮时，排队车辆都处于停止状态，从停止状态启动直到正常通行状态就造成了一个启动延误时间t_Q。所以在绿灯结束时，此期间内车辆等待时间除了由于排队车辆所造成原排队车辆和流入车辆的延误时间外，还包括t_a时刻所有排队车辆的启动延误时间，两者之和为

$$t_{Yb}=S_{xjk}(t_a)*t_Q+\int_{t_a}^{t_b}S_{xjk}(t)dt \tag{5}$$

（3）$t\in[t_b,t_c]$

该时间段车道处于黄灯状态，过停止线的车辆可以通行，但其他车辆都不能通行。

a) 若$S_{xjk}(t_b)>0$，表明该车道拥挤，在绿灯结束时仍有车辆滞留，则黄灯结束时的排队车辆数为

$$S_{xjk}(t)=S_{xjk}(t_b)+\int_{t_b}^{t}u_{xjk}(\tau)d\tau=S_{(x-1)jk}+\int_{t_0}^{t}u_{xjk}(\tau)d\tau-U_{jk}\bullet(t_b-t_a) \tag{6}$$

b) 若$S_{xjk}(t_b)\le 0$，表明绿灯结束时没有车辆滞留，则黄灯结束时的排队车辆数为

$$S_{xjk}(t)=S_{xjk}(t_b)+\int_{t_b}^{t}u_{xjk}(\tau)d\tau=\int_{t_b}^{t}u_{xjk}(\tau)d\tau \tag{7}$$

黄灯结束时，此期间内车辆等待时间为

$$t_{Yc}=\int_{t_b}^{t_c}S_{xjk}(t)dt \tag{8}$$

（4）$t\in[t_b,t_d]$

车道在该时间段处于红灯状态，不具有通行权，排队的车辆数为：

$$S_{xjk}(t)=S_{xjk}(t_c)+\int_{t_c}^{t}u_{xjk}(\tau)d\tau=S_{(x-1)jk}+\int_{t_0}^{t}u_{xjk}(\tau)d\tau-U_{jk}\bullet(t_b-t_a) \tag{9}$$

第二个红灯结束时，此期间内车辆等待时间为

$$t_{Yd}=\int_{t_c}^{t_d}S_{xjk}(t)dt \tag{10}$$

综合以上，则j道口上第k车道总的车辆等待时间为

$$t_{Yxjk}=t_{Ya}+t_{Yb}+t_{Yc}+t_{Yd} \tag{11}$$

对于四个道口上$k=3$的车道都是往右转，由于假定都是通畅的，所有过往车辆不存在需要等待的情况，即有$t_{Yxj3}=0$，故在单交叉口控制中不予考虑。

在第x周期T_x内，由该车道到达交叉路口的车辆总数是

$$M_{xjk}=\int_{t_0}^{t_0+T_x}u_{xjk}(t)dt \tag{12}$$

3.1.2中间变量的确定

在第x周期内，周期时长等于四个绿灯时间和四个黄灯时间之和，即$T_x=\sum_{i=1}^{4}(t_{xi}+t_H)$；对于$j$道口上$k$车道而言，周期时长为红、绿、黄各亮一次持续的时间。因为在任一相位上，都有两条车道对称运行，所以它们对应的t_a,t_b,t_c,t_d值是相同的。

初始相位和初始时间t_0取不同的值，各条车道上t_a,t_b,t_c,t_d是不一样的，但方法都是一样。一个周期的初始相位取任意一个都可以，这里取初始相位为题示第一相位，为便于讨论，取$t_0=0$，那么各条车道上t_a,t_b,t_c,t_d的值如表1，若t_0取值不为0，只需在表中所给的时间值都加上t_0即可。

表1 中间时间变量值

<table>
<tr><th>j 道口</th><th>k 车道</th><th>t_a</th><th>t_b</th><th>t_c</th><th>t_d</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">t_{x1}</td><td rowspan="2">$t_{x1}+t_H$</td><td rowspan="2">T_x</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td rowspan="2">$t_{x1}+t_H$</td><td rowspan="2">$t_{x1}+t_{x2}+2t_H$</td><td rowspan="2">$t_{x1}+t_{x2}+2t_H$</td><td rowspan="2">T_x</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td rowspan="2">$t_{x1}+t_{x2}+2t_H$</td><td rowspan="2">$t_{x1}+t_{x2}+t_{x3}+2t_H$</td><td rowspan="2">$t_{x1}+t_{x2}+t_{x3}+3t_H$</td><td rowspan="2">$T_x$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td rowspan="2">$t_{x1}+t_{x2}+t_{x3}+3t_H$</td><td rowspan="2">$t_{x1}+t_{x2}+t_{x3}+t_{x4}+2t_H$</td><td rowspan="2">$T_x$</td><td rowspan="2">$T_x$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>2</td></tr>
</table>

将表1中的时间值带入上面的车辆等待时间模型，就可以消去中间变量t_a,t_b,t_c,t_d。

3.2 单交叉路口实时配时方案的点控制模型

交叉路口的控制就是为了尽可能的使更多的车辆通过路口，并使车辆的平均等待时间尽可能的短。为此目的，需要建立配时模型，通过科学分配各向车辆通行时间，减少车辆平均等待时间。这也就是问题一要解决的。

车辆平均等待时间就是用交叉路口所有车辆的等待时间之和除以到达该路口的车辆总数。对于单个交叉路口，各道口右转的车辆是顺畅的，不会带来车辆的等待时间，所以，右转的车辆数不计入到达交叉路口的总车辆数，即$k \neq 3$。因此，到达交叉路口的车辆总数为

$$M_x = \sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{2} M_{xjk} \tag{13}$$

根据式（11）和式（12）可以计算得出周期内车辆等待时间及车辆数，然后建立以最小车辆平均等待时间为目标的交通灯实时配时控制方案的数学模型，其目标函数为

$$\min \quad t_{Yx} = \sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{2} t_{Yxjk} \Big/ M_x \tag{14}$$

要求解该目标函数，首先需要根据实际背景，分析交通信号灯的控制过程，找出相关的约束条件。下面就分析相关变量的约束条件。

我们知道，过快地变更相位，将会使有行使权的车辆在还没有完全启动进入通行时就没有通行权了，这不仅增加车辆等待时间，也势必造成堵车，故绿灯时长不能太小；同理，若某相位绿灯时长太大，则会造成其他方向上车辆滞留严重从而迅速增加车辆等待时间，所以绿灯时间也不能太大。因此有约束

$$t_{\min} \le t_{xi} \le t_{\max}, \quad (i = 1,2,3,4) \tag{15}$$

从安全角度考虑，为保证行人足够的时间通过人行横道，绿灯时长不能小于某一安全值$t_{\min}$，该值根据路的宽度和行人速度确定，一般取$t_{\min}=15s$；根据经验，

$t_{\max} = 120s$。

因为最小绿灯时长为15秒，那么四个相位下的周期时长不能小于60秒加四个黄灯时长，即$T_{\min} = 60 + 4t_H$；由于司机等待的耐心是有限度的，此限度值上限一般取200秒，因而周期时长不能超过该值，故$T_{\max} = 200s$。所以有

$$T_{\min} \le T_x \le T_{\max} \text{ 即 } 60 + 4t_H \le T_x \le 200 \qquad (16)$$

排队等待的车辆数不能太大，否则将会造成拥堵，增加等待时间，降低路口的通行能力，所以滞留车辆数需满足：$S_{xjk}(t) \le S_{jk}$

根据专家经验，一般黄灯时间应该控制在2~5秒内，即$2 \le t_H \le 5$；根据车辆启动时间的统计分析，有$2 \le t_Q \le 4$；由周期时长的定义有$T_x = \sum_{i=1}^{4}(t_{xi} + t_H)$。

综上所述，以交叉路口车辆平均等待时间最短为目标函数，建立交通信号实时配时点控制模型：

$$\min \quad t_{Yx} = \sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{2} t_{Yxjk} \Big/ M_x$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} T_x = \sum_{i=1}^{4}(t_{xi} + t_H) \\ t_{\min} \le t_{xi} \le t_{\max}, \quad (i = 1,2,3,4) \\ 60 + 4t_H \le T_x \le 200 \\ S_{xjk}(t) \le S_{jk}, \quad (k \ne 3) \\ 2 \le t_H \le 5 \\ 2 \le t_Q \le 4 \end{cases} \qquad (17)$$

其中，M_x为到达交叉路口的车辆总数，根据式（13）计算得到。

通过一定的算法，找出该模型中最佳决策变量t_{xi} $(i = 1,2,3,4)$，即各个相位的绿灯时间，然后根据绿灯时间可以计算其它关心的参数，如绿信比、有效绿灯时间等。

3.3 线状多交叉路口实时配时方案的线控制模型

线状交叉路口是由多个单交叉路口组成，为了计算全体车辆在所有道口的等待时间，不仅要分析各个交叉路口四个道口的车流量，还需要分析相邻交叉路口之间的车流关系以及它们的相位差。为了简化分析问题的复杂性，又不失问题的真实性，这里分析两个交叉路口的情形，如图3。而对于具有更多交叉路口的情形，方法类似，只是更

复杂，计算量更大。

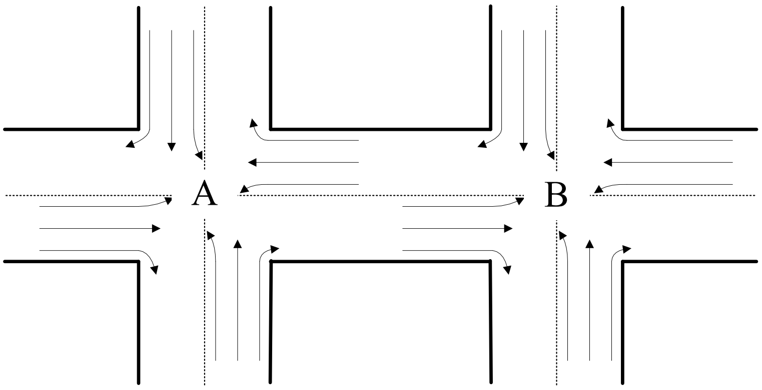

图3 两个交叉路口交通流示意图

由于有两个交叉路口，它们的信号灯变换的周期可以是相同，也可以是不相同。如果不相同，则不用考虑相位差的影响，只需分析两交叉路口车流量的关系；如果相同时，则还需要考虑相位差对于车辆等待时间的影响。根据假设（4），这里只对周期相等的情况进行分析。

由于两个交叉路口具有相同的周期，即对于任何一周期x都有$T_x^A = T_x^B$，那么由两个交叉路口构成的整体信号灯周期为$T_x^{AB} = T_x^A = T_x^B$。相位差为同方向上的两个相关相位的启动时间差，与哪个先启动无关，这里假设A路口的相位先启动，与B路口的相关相位差为Δt，如图4。

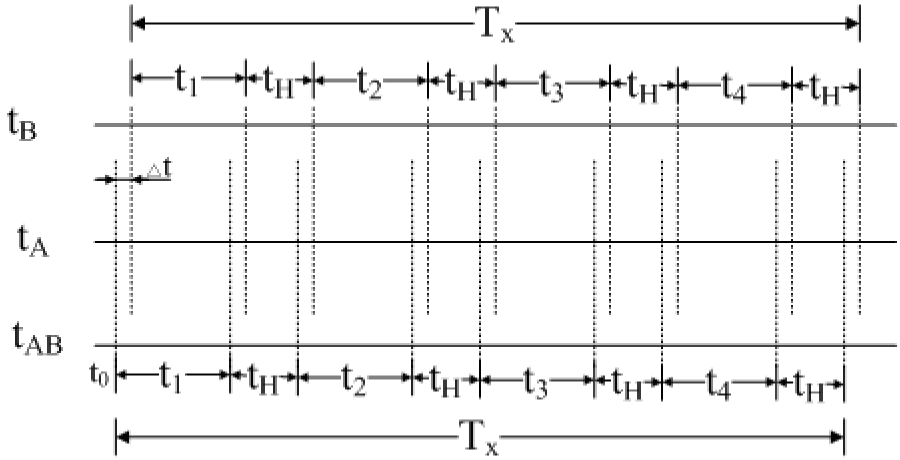

图4 两交叉路口相位变换示意图

设第x周期的开始时间为t_0^{AB}，以A路口的第一相位为起始相位，即$t_0^A = t_0^{AB}$。因此，用t_0^A替代3.1节中的t_0，然后依据3.1节给出的式（11），就可以得出A路口各个车道

上的所有车辆总的等待时间 $t_{Yx}^{A}=\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{3}t_{Yxjk}^{A}$ ；B路口的第一相位启动时间为 $t_0^{A}=t_0^{AB}+\Delta t$，那么同理，用 t_0^{B} 替代3.1节中的 t_0，就可以得出B路口各个车道上的所有车辆的等待时间 $t_{Yx}^{B}=\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{3}t_{Yxjk}^{B}$ 。

但在以上两个等待时间的计算中应注意，由于A、B路口具有相关性，部分车道的车流量需满足一定条件。在单交叉路口时，四个道口的流入量相互独立；但是在有A、B两个交叉路口相连时，A的3号道口车的流出量是B的1号道口的流入量，而B的1号道口车的流出量是A的3号道口的流入量，如图5。假设A、B路口之间的车流正常行驶时间为 t_d^{AB}，该值与两路口之间的距离和车流速度有关。

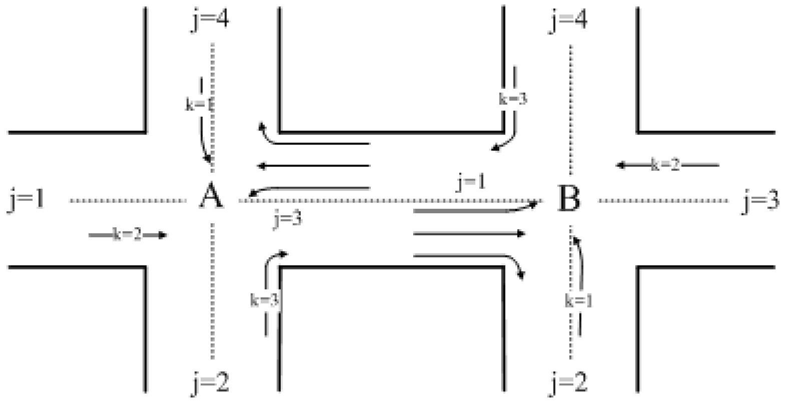

图5 两路口相关车流量约束图

A路口流入B路口的1号道口，分三种情况考虑。

（1）A路口在第二相位时，1道口的 $k=2$ 车道上的车流入B路口。因为车有启动损失时间，所以真正从A流入B路口的车辆行驶时间段为：$t_{x1}^{A}+t_H+t_Q\le t\le t_{x1}^{A}+t_{x2}^{A}+2t_H$。在该时间段内还有车流从A路口2号道口 $k=3$ 车道右转进入B路口，经过 t_d^{AB} 时间，该两个车流到达B的1号道口的各车道上，所以

$$u_{x12}^{A}(t)+u_{x23}^{A}(t)=\sum_{k=1}^{3}u_{x1k}^{B}\left(t+t_d^{AB}\right) \qquad (18)$$

（2）A路口在第三相位时，4道口$k=1$车道上的车流入B路口。由于车流的启动损失时间，所以真正从A流入B路口的车辆行驶时间段为：

$\sum_{i=1}^{2} t_{xi}^{A} + 2t_H + t_Q \le t \le \sum_{i=1}^{3} t_{xi}^{A} + 3t_H$。在该时间段内也还有车流从A路口2号道口$k=3$车道右转进入B路口，经过$t_d^{AB}$时间，该两个车流到达B的1号道口的各车道上，所以

$$u_{x41}^{A}(t) + u_{x23}^{A}(t) = \sum_{k=1}^{3} u_{x1k}^{B}\left(t + t_d^{AB}\right) \qquad （19）$$

（3）周期内A路口的其他相位时，只有2号道口$k=3$车道右转进入B路口，也是经过t_d^{AB}时间，该车流到达B的1号道口的各车道上，所以

$$u_{x23}^{A}(t) = \sum_{k=1}^{3} u_{x1k}^{B}\left(t + t_d^{AB}\right) \qquad （20）$$

同理，可以分析出从B路口流入A路口的3号道口的车流，从而得出车流的约束，有

当$t_{x1}^{B} + t_H + t_Q + \Delta t \le t \le \sum_{i=1}^{2} t_{xi}^{B} + 2t_H + \Delta t$时

$$u_{x32}^{B}(t) + u_{x43}^{B}(t) = \sum_{k=1}^{3} u_{x3k}^{A}\left(t + t_d^{AB}\right) \qquad （21）$$

当$\sum_{i=1}^{2} t_{xi}^{B} + 2t_H + t_Q + \Delta t \le t \le \sum_{i=1}^{3} t_{xi}^{B} + 3t_H + \Delta t$时

$$u_{x21}^{B}(t) + u_{x43}^{B}(t) = \sum_{k=1}^{3} u_{x3k}^{A}\left(t + t_d^{AB}\right) \qquad （22）$$

周期内的其它时间时

$$u_{x43}^{B}(t) = \sum_{k=1}^{3} u_{x3k}^{A}\left(t + t_d^{AB}\right) \qquad （23）$$

第x周期内，虽然从A的2号道口3车道右转的车可能驶入B的1号道口的1车道或2车道从而增加到达该路口的车辆数；但同样也存在从A的其它车道驶入B的1号道口3车道右转离开路口，从而减少了该路口的车辆数。因此，计算总的到达车辆数同样不考虑右转的车辆，即$k \ne 3$。

除了路口A的3号道口和路口B的1号道口没有外部车辆到达整个线性交叉路口，其它车道的车都有到达交叉口系统的车。因此，第 x 周期内进入A、B交叉口系统的车辆总数

$$M_x^{AB}=\sum_{j=1,j\neq 3}^{4}\sum_{k=1}^{2}M_{xjk}^{A}+\sum_{j=2}^{4}\sum_{k=1}^{2}M_{xjk}^{B}\ 。\qquad （24）$$

综合以上分析，以两交叉路口车辆的平均等待时间最短为目标函数，建立等周期下的两交叉路口线状实时配时规划模型：

$$\min\quad t_{Yx}^{2}=\left(\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{3}t_{Yxjk}^{A}+\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{3}t_{Yxjk}^{B}\right)\Big/M_x^{AB}$$

$$\text{s.t.}\quad\begin{cases}T_x^{AB}=T_x^{A}=T_x^{B}\\ T_x^{A}=\sum_{i=1}^{4}\left(t_{xi}^{A}+t_H\right)\\ T_x^{B}=\sum_{i=1}^{4}\left(t_{xi}^{B}+t_H\right)\\ t_{\min}\le t_{xi}^{A},t_{xi}^{B}\le t_{\max},\quad (i=1,2,3,4)\\ 60+4t_H\le T_x^{AB}\le 200\\ S_{xjk}^{A}(t)\le S_{jk}^{A},\\ S_{xjk}^{B}(t)\le S_{jk}^{B}\\ 2\le t_H\le 5,\quad 2\le t_Q\le 4\end{cases}\qquad （25）$$

其中，M_x^{AB} 为到达交叉路口的车辆总数，根据式（24）计算得到。除了以上给出的约束条件，计算车辆等待时间时还要考虑到前面给出的相关车道的车流约束。

虽然两个交叉路口的周期相等，但是其配时方案可以不同，所以该模型中有8个决策变量：$t_{xi}^{A},t_{xi}^{B}\ (i=1,2,3,4)$，即两交叉路口的四个相位的绿灯持续时间。相对于问题一的模型，该模型不仅增加了约束条件，而且决策变量也增加了一倍。所以，模型计算量较大，需要设计好的求解算法，而其算法的计算速度要快，否则实时性就不存在了，也难以应用于实际控制。

3.4基于粒子群算法的点、线实时控制模型求解算法

粒子群算法的思想来源于对鸟捕食行为的模仿。粒子群算法从鸟类搜寻食物的模型中得到启发并用于解决优化问题。它的运行机理不是依赖个体的自然进化规律，而是对生物群体的社会行为进行模拟。

如果我们把一个优化问题看作是在空中觅食的鸟群，那么粒子群中每个优化问题的可行解都是搜索空间的一只鸟，称之为“粒子”。“食物”就是伏化问题的最优解. 粒子只有速度和加速度用于本身状态的调整。没有质量和体积。“群”的概念源自人工生命，满足人工生命的五个基本原则。每个粒子都有一个由优化问题决定的适应度用

来评价粒子的“好坏”程度，每个粒子还有一个速度决定它们飞翔的方向和距离，它根据自己的飞行经验和同伴的飞行经验来调整自己的飞行。粒子群初始化为一群随机粒子(随机解)，然后通过迭代的方式寻找最优解，在每一次的迭代中，粒子通过跟踪两个“极值”平来更新自己，第一个是粒子本身所经历过的最好位置，称为个体极值。

另一个是整个种群所经历过的最好位置。这个极值就是全局极值。每个粒子通过上述的两个极值不断更新自己，从而产生新一代的群体。

3.4.1编码方式

在粒子群算法中，每个粒子就是一个备选解，多个粒子共存、合作寻优。在实时配时模型中，粒子表示配时方案，粒子长度为交通信号的相位数。单位粒子的取值范围为绿灯的最小时长和最大时长。车辆平均等待时间作为粒子的适应度。

3.4.2位置和速度更新公式

粒子群算法的实质在于粒子根据自己和同伴的飞行经验不断调整位置和速度，从而向最优位置飞行。粒子的新位置是粒子的速度、个体极值和全局极值相互作用的结果。

在找到个体极值和全同极值这两个最优值时，每个粒子根据如下公式来更新自己的速度和位置：

$$v_{ij}(t+1) = \omega * v_{ij}(t) + c_1 * rand1 * (p_{ij}(t) - x_{ij}(t)) + c_2 * rand2 * (p_{gj}(t) - x_{ij}(t)) \quad (26)$$

$$x_{ij}(t+1) = x_{ij}(t) + v_{ij}(t+1) \quad (27)$$

其中，ω称为惯性权重，其大小决定了对粒子当前速度继承的多少，合适的选择可以使粒子具有均衡的探索能力和开发能力，c_1, c_2称为学习因子或加速系数，一般为正常数。学习因子使粒子具有自我总结和向群体中优秀个体学习的能力，从而向自己的历史最优点以及群体内或领域内的历史最优点靠近。$rand1$和$rand2$为两个均匀分布在[0, 1]之间的随机数；$i = 1,2\cdots,n; j = 1,2,\cdots M$。

3.4.4 粒子群算法的参数设置

（a）认知系数c_1和社会系数c_2

认知系数c_1和社会系数c_2分别调节粒子向个体极值和全局最好粒子的飞行步长。合适的c_1和c_2可以加快收敛且不易陷人局部极值。一般根据粒子与全局极值和个体极值的距离动态调整c_1和c_2。在实时模型中，依据点、线、面控制的特点，制定系数$c_1 = 0.5$和$c_2 = 1$。

(b)惯性系数

惯性系数ω调节个休历史信息对粒子的影响。较大的ω可以加强离散粒子群算法的全局搜索能力，而较小的ω有利于离散粒子群算法的局部搜絮。在实时模型中，设置λ ω随着搜索过程的深入。ω逐渐减小，开始精细搜索研究。在实时模型中，取$\lambda = 0.8$， $\omega = 1$

3.4.5算法流程

粒子群算法的流程如下：

Step1: 初始化权重因子ω、加速系数c_1和c_2和为惯性权重下降速率λ；

Step2: 随机初始化粒子群中粒子的位置，并计算交通配时方案模型的目标函数值，以此作为粒子的适应度；

Step3: 令$p_i(t) = X_i(t)$， $p_g(t)$设置为初始群体中最佳粒子的位置；

Step4: 判断算法收敛准则是否满足，如满足，则输出$p_g(t)$，并由$p_g(t)$得到最佳交通实时配时方案，同时计算平均等待时间，算法结束；否则，执行Step5；

Step5: 对群体中的所有粒子进行如下操作

①按式更新粒子位置，并计算适应度；

②如果粒子适应度优于$p_i(t)$，令$p_i(t) = X_i(t)$；

③如果粒子适应度优于$p_g(t)$。令$p_g(t) = X_i(t)$。

Step6: 令$\omega = \lambda\omega$，转Step4。

离散粒子群算法的流程图如图6所示

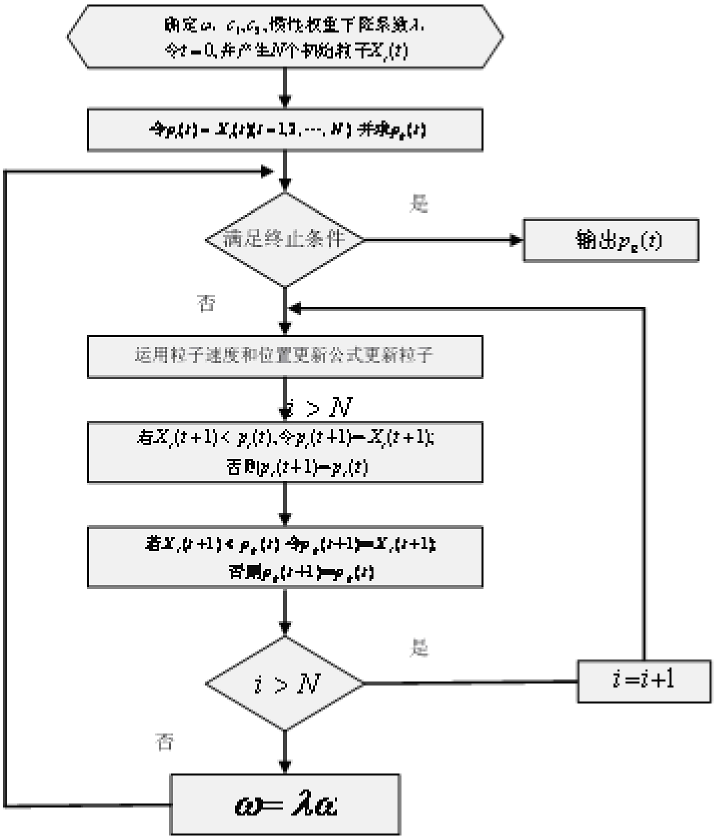

图6 离散粒子群算法的流程图

在运用粒子群算法对模型进行计算之前，需要先对模型进行离散化处理，否则难以用该算法进行求解。对于模型中连续的量，采用单位时间的步进方式进行离散化计算。编程时较易处理，在此不做过多的叙述。

四．交通信号实时配时模型的仿真及分析

由于后面仿真中需要用固定配时方案与已经建立的模型作比较，这里先简要介绍固定配时方案模型。

4.1固定配时方案

固定周期的配时控制方案

Webster最佳周期长的计算方法：

$$\mathrm{T}_{c_0}=\frac{1.5\bullet \mathrm{L}+5}{1.0-Y} \qquad (28)$$
$$\mathrm{L}=n\bullet t_H+\mathrm{R}$$

其中T_{c_0}表示最佳周期长，L为交叉口信号每个周期的总损失时间，R是四面同时红灯的时间（取零值）。Y为交叉路口流率比，组成周期的全部信号相位的各个最大y值

之和，$Y=\sum\max[y_1,y_2,\cdots,]$。

由式（38）确定的最佳周期时长，可得每周期的有效绿灯时间$G_e=T_{c_0}-L$。

G_e在所有信号相位之间,按各相位的最大流量比值进行分配，得各相位的有效绿灯时间

$$g_e=G_e\frac{\max[y_1,y_2,\cdots]}{Y} \tag{29}$$

该方法是以车辆通过交叉口的等待时间作为唯一的衡量指标，然后进行配时方案的优化。车辆在信号交叉口的延误时间主要取决于车辆的到达率和交叉口的通行能力，而车辆到达率和通行能力是随时间而复杂地变化着的。用Webster方法进行配时的定时控制方法是以离线的方式确定信号周期和绿信比，对于不断变化的交通流，很难得到良好的控制效果。

定时控制适合于交叉口的交通流量变化比较有规律的交通情况，对于一天内的交通量的不同变化情况，采用多时段定时控制可以适应交通情况的规律变化，仍是一种常用的信号配时方案。但是，由于城市的发展，定时控制运行一段时间后，交通情况会发生一些变化，这时需要进行交通调查重新确定配时方案，比较费时费力。

4.2单交叉路口实时配时模型的仿真分析

一般城市交通流服从泊松（Poisson）分布规律。因此，用实时产生的泊松分布序列来模拟城市交通流的分布规律，然后用此序列作为车流带入模型中仿真，并比较实时配时和固定配时的效果。

4.2.1实时产生交通流的方法

泊松（Poisson）分布规律与概率密度函数为

$$P[N(t)=K]=\frac{(\lambda t)^K}{K!}e^{-\lambda t}，\quad (K=0,1,2,\cdots) \tag{30}$$

$$f(t)=\begin{cases}\lambda\exp(-\lambda t), & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases} \tag{31}$$

泊松分布只有一个参数，分布均值λ。因而只要给出一个值，就能产生一组以该值为均值的泊松分布序列。所以，只要假定一个车流量均值，就能得到一组服从泊松分布的车流量序列。

由于模型中考虑了8条车道，所以首先需要8个车流量的均值，这里通过Matlab产生8个随机数作为8个车道上车流量的均值。然后分别以这些随机数作为车流量均值，产生8组服从泊松分布的车流量序列，这就是仿真所需要的车流量序列。

4.2.2周期固定配时方案仿真分析

为了符合实际车流量的变化，假设每个个车道在一段时间内的平均车流量如图7所示，其总的平均车流量为363.6辆/小时，并假设饱和流量为1800辆/小时，各相位的转换损失为3秒。

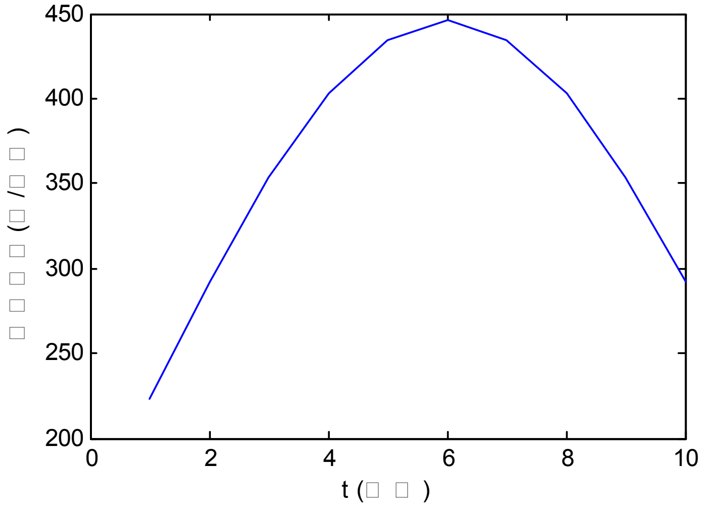

图7 交叉路口平均车流量

对于固定配时方案，先用Webster方法估算周期。根据式（38）计算可得周期为120秒。再用等饱和比的方法计算各相位的配时，由于假设各车道的平均流量相等，因此其配时方案为[27 27 27

27]，总的相位损失为12秒。对于定周期的实时配时方案，为了便于比较，也选用120秒作为其周期。

把4.2.1节中产生的车流量序列代入到问题一的实时配时模型中，用粒子算法求解得到交通信号实时配时方案，见表2；并与固定配时方案相比较，车辆平均等待时间的比较结果见图9。

表2 周期确定的实时配时方案

周期	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
相位1（秒）	43	24	20	34	34	26	35	30	32	26
相位2（秒）	20	20	30	24	21	31	13	26	23	26
相位3（秒）	16	26	29	23	26	32	32	32	25	15
相位3（秒）	29	38	29	27	27	19	28	20	28	41

平均等待时间（秒）	15.53	21.38	29.74	37.34	34.66	59.28	35.54	30.71	32.11	15.99
(固定配比)平均等待时间（秒）	15.86	22.90	34.44	40.57	43.04	63.15	51.47	35.51	35.14	16.27

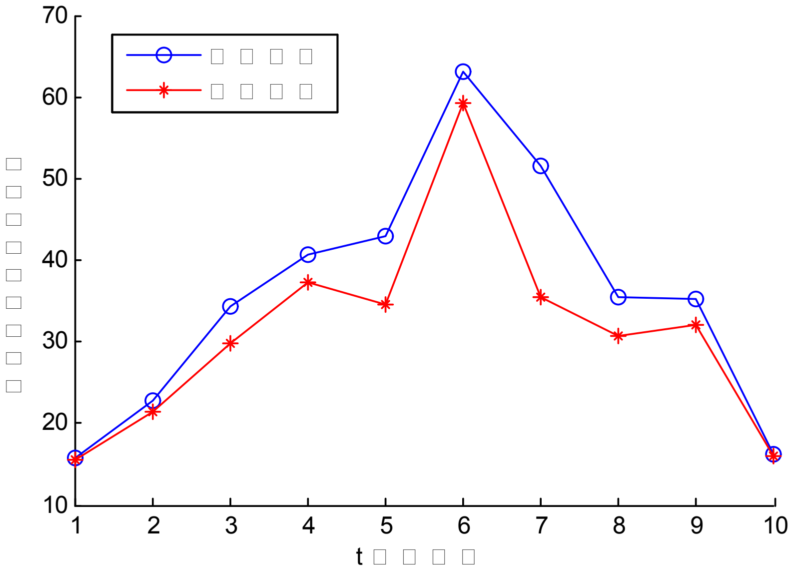

图8周期固定的实时配时与固定配时的平均等待时间图

由图8可以看出，对于不同周期，采用粒子算法得到的定周期配时方案要优于固定配时方案，但优势不是很明显。这主要是因为采用了车辆到达的平均流量都相等的交通序列，虽然交通强度有变化，但交通强度的比值变化比较小，导致固定配时方案与最优实时配时方案比较接近。而对于实际情况，特别是上下班车流高峰时，与平峰相比不仅是流量强度发生了改变，而且各车道的实时交通强度的比值关系也发生了较大变化（如上下班主要集中在东西路段，而南北路段车流量相对较少）。这时，固定配时方案如果没有改变，则实时配时将会有明显的优势。这可以通过改变交通流序列中各个车道的流量强度比值来模拟。模拟结果如图9所示。由图可以清晰看出，当各车道交通强度的比值关系发生显著变化时，实时配时方案就表现出了明显的优势，较大程度地较少了车辆的平均等待时间。

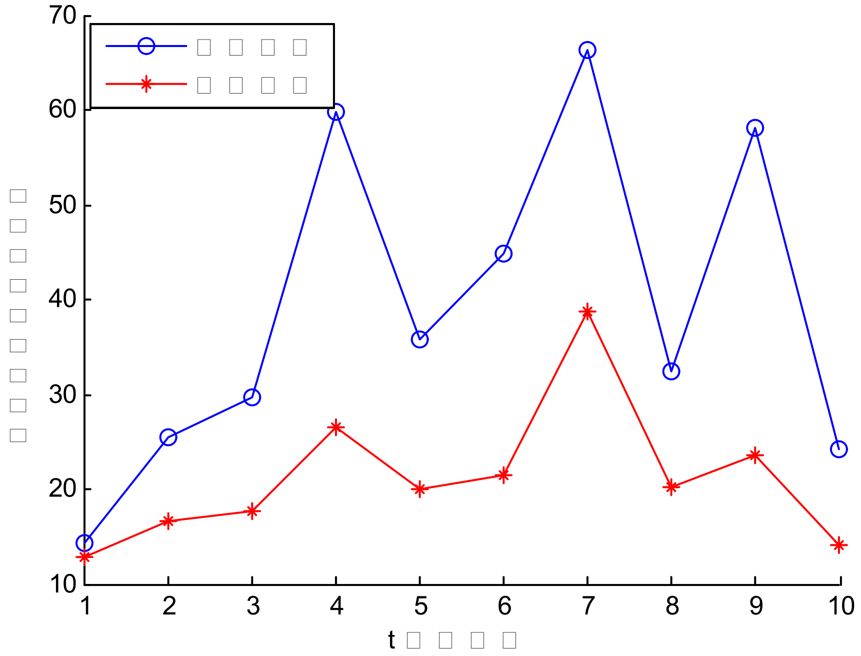

图9 实时配时与固定配时的平均等待时间图

4.2.3不固定周期的配时方案仿真分析

对于周期不固定的情况，根据问题一的规划模型中的分析，对每个相位的时间限定在15秒到120秒之间，固定配时方案保持不变。通过仿真求解实时配时方案和固定配时方案，其结果如图10与表3所示。

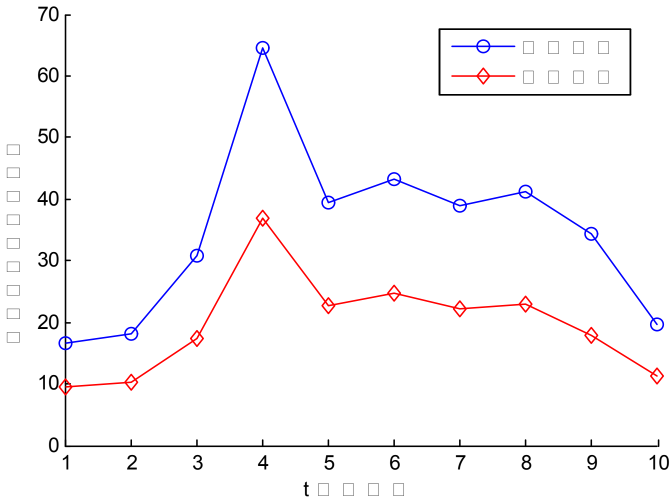

图10 周期不固定配时的平均等待时间图

表3 周期不确定的实时配时方案

周期	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
相位1（秒）	15	15	15	15	15	15	15	19	15	15
相位2（秒）	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
相位3（秒）	15	15	15	15	17	15	15	18	15	15
相位3（秒）	15	15	19	15	15	15	15	15	19	15
平均等待时间（秒）	9.4009	10.3636	17.4249	36.8752	22.6763	24.7764	22.2262	22.9132	17.8331	11.1779
(固定配比)平均等待时间（秒）	16.5392	18.2393	30.8507	64.4372	39.5531	43.2864	38.9057	41.2984	34.3239	19.6698

以上分别考虑了交通强度比值变换的情况下，周期固定和周期不固定的实时配时方案与固定配时方案的比较。结果表明采用实时配时方案在各种情况下都要优于固定配时方案，特别是当交通交通强度的比值变化较大时，优势更为明显。

4.3线状多交叉路口的仿真分析

由于线状多交叉路口模型的计算量很大，而能够允许程序运行的时间有限，所以仿真时对所建立的模型作了进一步的简化：

i) 每个交叉路口的交通灯周期相同；并且各个相位时常也相等。

ii) 每个交叉路口都是等价的；

iii) 不考虑系统内的等待时间。

这样对于线状区域和网络区域可以等价于一个点，采用点控制模型的方法进行计算配时方案，所不同的是车道数增加了。对于线控制模型，增加一个交叉路口相当于增加4个车道。

表4线状交叉口实时配时方案

周期	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
相位1（秒）	12	20	19	30	37	24	16	25	13	19
相位2（秒）	20	26	15	20	17	16	28	23	19	13
相位3（秒）	41	29	32	27	33	36	34	28	49	36
相位3（秒）	35	33	42	31	21	32	30	32	27	40

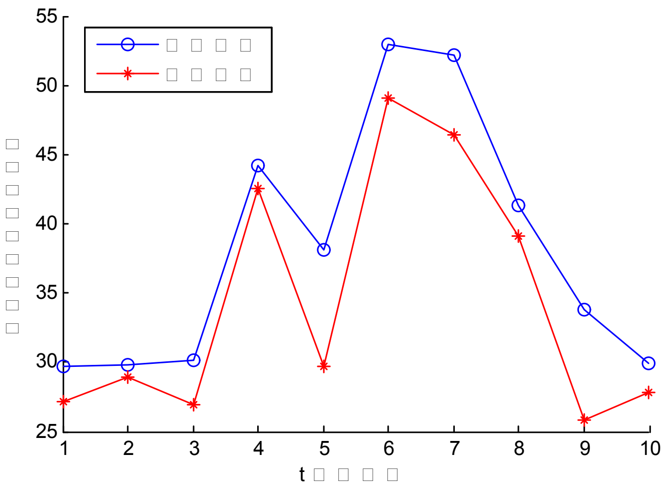

图11线状交叉口实时配时与固定配时的平均等待时间图

通过严重的简化，对于线状交叉路，虽然平均等待时间缩短量不是很多，但本文建立的实时配时模型以及相应的粒子群算法都能得到更优的结果，
说明模型和算法是更合理的。如果不对模型作进一步简化，那么在程序运行一定时间之后所得的仿真结果将会更加令人满意。

4.4算法的可计算性和复杂性分析

粒子群算法具有快速搜索优化解的特点，计算速度快，并且对于线、面模型，先转化成点模型再进行计算，降低的算法的复杂性，完全具备可计算性。粒子群算法的计算复杂性包含两个方面：一是所有粒子移动的次数，若有M个粒子移动了C次，则总次数为CM次；
另一个是计算适应度的次数，这与相位数目I以及车道总数K有关，算法的计算复杂度为$O(IKCM)$

参考文献

［1］ 徐勋倩, 黄卫, 单路口交通信号多相位实时控制模型及其算法[J], 控制理论与应用,

2005年03期。
[2] 陈琳 , 刘翔 , 孙优贤，单交叉路口交通流的通用多相位智能控制策略[J],浙江大学学报（工学版），2006年11期网络多交叉路口控制模型与算法。
[3] 李建斌, 高成修,城市道路网络多交叉路口交通信号实时优化控制模型与算法[J],系统工程,2004年10期。
[4] 曹家年，潘鑫，岳士举，基于车队D-Q模型的交通信号控制算法[J]，哈尔滨工程大学学报
[5] 徐雪松,景玉军,何珍梅，城市交通信号配时的免疫算法[J]，华东交通大学学报，24(1),2007。
[6] 陈静,交叉口实时信号配时优化模型,河南机电高等专科学校学报[J],15(6),2007
[7] ALLOP R E，Delay at a fixed time traffic signal:theoretical analysis[J]，Transportation Science,6(3)：260-285,1972。
[8]周晶，城市交通系统分析与优化[M]，南京：东南大学出版社，2001。